OBSAH

Na vysvětlenou ... 6
Úvod ... 8
1 Poměr ... 10
Cvičení 1 ... 20
2 Úměra ... 21
3 Postupný poměr ... 27
Cvičení 2 ... 32
4 Závislost veličin ... 34
5 Přímá úměrnost ... 40
6 Nepřímá úměrnost ... 47
Cvičení 3 ... 56
7 Trojčlenka ... 58
Cvičení 4 ... 67
8 Měřítko ... 68
9 Diagramy ... 73
Cvičení 5 ... 77
10 Úlohy z matematické olympiády ... 81
11 Souhrnná cvičení ... 86
Výsledky průběžných úkolů ... 97
Výsledky cvičení ... 99
Výsledky souhrnných cvičení ... 100

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

ÚVOD

Prohlédnete-li si dva motýly na obrázku, usoudíte patrně, že oba mají stejný tvar. Větší motýl je *zvětšenou kopií* menšího motýla. Jak tuto skutečnost vyjádřit početně? Budeme-li pečlivě měřit různé vzdálenosti, například délky tykadel, rozpětí křídel apod., budou naměřené hodnoty u většího motýla *stejnými násobky* příslušných hodnot u menšího motýla (konkrétně dvojnásobky). Mezi těmito hodnotami tedy panuje určitá závislost, které říkáme *úměrnost*. Rozhodujeme o ní srovnáváním dvojic údajů (v našem případě délek) způsobem, kterému říkáme *poměrný*. Dáváme tak odpověď na otázku „kolikrát“. (Jinou obvyklou metodou srovnávání údajů odpovídáme na otázku „o kolik“.) Úměrnostem v geometrii se budeme podrobně věnovat v sešitě *Podobnost a funkce úhlu*. Už v tomto sešitě však uvedeme řadu příkladů úměrností z praktického života. Později se mnohokrát setkáte s úměrnostmi ve fyzice, chemii i jiných oborech.

Ukázka © Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Poměrným způsobem můžeme mezi sebou srovnávat nejen délky úseček, ale i obsahy rovinných obrazců, objemy těles, hmotnosti předmětů a další druhy údajů, kterým souhrnně říkáme *skalární veličiny*. Výsledkem poměrného srovnání dvou hodnot téže veličiny (např. objemu) je vždy *číslo bez jednotek*, které udává, kolikrát je první hodnota větší než hodnota druhá. Toto číslo nezávisí na tom, jakou jednotku (objemu) k měření obou hodnot vybereme. Jak brzy uvidíme, v praxi se výsledné číslo obvykle zapisuje jako podíl dvou celých čísel. Takovému podílu pak říkáme *poměr* (daných objemů). Pro motýly na našem obrázku je poměr délek 2 : 1. Je to podobná situace, jako když racionální číslo zapisujeme zlomkem. Vysvětleme, proč nejde o podobnost náhodnou.

Jak jsme již uvedli, dvě hodnoty téže veličiny prakticky srovnáváme poměrem teprve až když je máme změřeny v určitých jednotkách. Jaká je však podstata *měření*? Je založeno na tom, že nejprve určitou hodnotu vybereme za jednotku a pak zjišťujeme, jaký *násobek* této jednotky je roven měřené hodnotě. Každé měření je tedy založeno na poměrném srovnávání (měřené hodnoty a vybrané jednotky). Při tom často nevystačíme s celými násobky, a tak si pomáháme *zlomky* jednotek. Určitě si vzpomenete, jak jste v primě v prvních hodinách o zlomcích nejprve krájeli na stejné díly koláče, jablka apod. Nyní místo koláčů mluvíme o jednotkách skalárních veličin, jde však o stejný postup. Zlomek (racionální číslo) je tedy výsledek poměrného srovnání dvou hodnot (téže skalární veličiny), které jsou celými násobky téže jednotky. Takové dvě hodnoty se nazývají *souměřitelné*.

Ve starověku lidé dlouho věřili, že při měření délek, obsahů a objemů vystačí s kladnými racionálními čísly, tj. poměry přirozených čísel. Starořecký matematik Pythagoras a jeho žáci (zvaní pythagorejci) dokonce věřili, že pomocí přirozených čísel lze vyjádřit veškeré vztahy a zákonitosti v přírodě. V „dokonalosti“ čísel pak spatřovali záruku harmonie celého vesmíru. Jaké bylo překvapení pythagorejců, když objevili, že délka strany čtverce není souměřitelná s délkou jeho úhlopříčky! Svět geometrie je tedy „bohatší“ než svět přirozených čísel! Tento poznatek přivedl řecké matematiky k myšlence zavést čísla geometrickou cestou jako *poměry délek úseček*. Tak veskrze praktické téma *měření veličin* sehrálo významnou úlohu v historii názorů na podstatu reálných čísel.

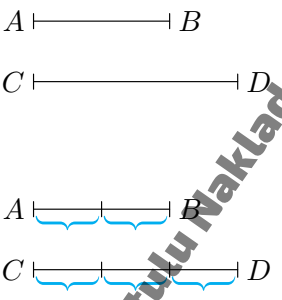
Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

1 POMĚR

Na nálepce sirupu je napsáno: *Smíchejte 1 díl sirupu s 5 díly vody.* Budeme-li se tímto návodem řídit, připravíme vždy „stejný“ nápoj (stejné barvy, chuti, hustoty apod.). Nezáleží tedy na tom, jaký objem má jeden díl sirupu, který použijeme. Říkáme, že sirup a voda jsou v takovém nápoji zastoupeny v *poměru* 1 : 5 (čti „jedna ku pěti“).

Jestliže poměr předepsaný výrobcem sirupu nedodržíme, nic vážného se nestane – nejvýš nám takový nápoj nebude chutnat. Závažnější následky však může mít nedodržení správného poměru látek např. při výrobě léků nebo stavebních hmot. Proto se s poměry naučíme dobře počítat.

? Co je *poměr*?



Na obrázku vidíte dvě úsečky AB a CD. Můžeme jejich délky porovnat podobně, jako jsme porovnali objemy sirupu a vody při přípravě nápoje?

K tomu je zapotřebí rozdělit každou z úseček na několik dílů tak, aby všechny díly byly stejné. Z obrázku vidíme, že úsečka AB je složena ze dvou takových dílů a úsečka CD ze tří dílů. (Každý díl má délku 9 mm.) Výsledek porovnání zapíšeme poměrem 2 : 3.

Kdybychom délku 9 mm vhodného dílu neznali, mohli bychom obě úsečky změřit a z naměřených hodnot sestavit podíl:

$$|AB| : |CD| = (18\,\text{mm}) : (27\,\text{mm}) = 18 : 27 = 2 : 3$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Všimněte si, že dělení $18 : 27$ jsme „nedopočítali“. Pouze jsme ho zjednodušili způsobem, jakým jsme dříve krátili zlomky. Z takového „nedopočítaného dělení“ je totiž lépe vidět, že nám jde ne o *jediné číslo* (podíl), ale o *vztah mezi dvěma čísly*. K souvislosti podílů a poměrů se za chvíli ještě vrátíme.

Podobně jako jsme poměrem porovnali objemy dvou tekutin (sirupu a vody) a délky dvou úseček, můžeme porovnávat i obsahy dvou mnohoúhelníků, hmotnosti dvou těles, ceny dvou výrobků a další dvojice „množství“ téhož druhu. Výsledkem porovnání takových údajů je vždy poměr dvou čísel.

Poměr dvou kladných čísel a, b zapisujeme $a : b$ a čteme „á ku bé“. Porovnáváme jím dvě množství, z nichž první je složeno z a dílů a druhé z b dílů, přičemž všechny díly jsou stejné. (Velikost těchto dílů však ze zápisu $a : b$ nevyčteme.)
Číslo a se nazývá *první člen*, číslo b *druhý člen* poměru $a : b$.

Pořadí členů poměru je důležité. Pomyslete, jak by to dopadlo, kdybychom sirup a vodu smíchali v poměru $5 : 1$ místo předepsaného $1 : 5$. Proto při čtení návodů k přípravě směsí musíme pečlivě sledovat, v jakém pořadí jednotlivé látky do uváděných poměrů vstupují.

Nejčastěji se setkáváme s poměry, jejichž členy jsou *přirozená* čísla. Protože už dovedeme pracovat se *zlomky* dílů, dokážeme si také představit, co znamená např. poměr $\frac{5}{3} : \frac{1}{2}$, jehož členy jsou čísla *racionální*. Ještě v této kapitole si to připomeneme. Z geometrie

ukázka titulu nakladatelství Prometheus http://prometheus-nakl.cz

? Co je úměra?

Už jsme si řekli, že **úměra** je zápis

$$a : b = c : d,$$

který vyjadřuje, že poměry $a : b$ a $c : d$ mají stejnou hodnotu. Čísla a, b, c a d se nazývají *členy úměry*. Navíc se číslům a, d říká členy *vnější*, číslům b, c členy *vnitřní*.

vnitřní členy

$$a : b \quad = \quad c : d$$

vnější členy

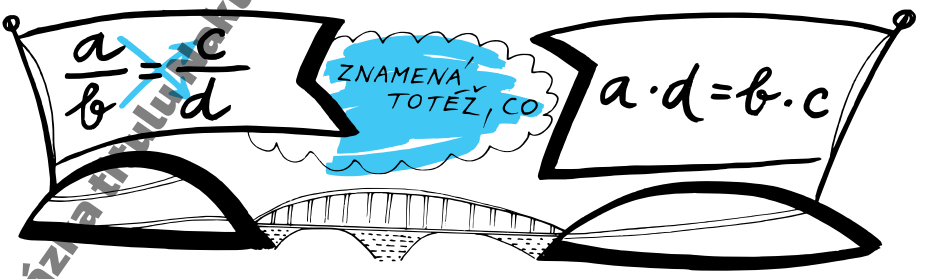
Sestavováním úměr se budeme zabývat při řešení úloh v dalších kapitolách. V každé sestavené úměře pak budeme obvykle znát tři členy, zatímco čtvrtý člen budeme hledat. Proto se teď naučíme, jak neznámý člen úměry vypočítat.

? Jakou podmínku splňují členy úměry?

Úměra $a : b = c : d$ vyjadřuje, že oba poměry $a : b$ i $c : d$ mají stejnou hodnotu. To, jak už víme, znamená, že se rovnají zlomky $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Rovnost $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jsme pro *konkrétní* zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ověřovali zpravidla vhodným *rozšiřováním* nebo *krácením*. Bylo to výhodnější než používat obecné pravidlo o rovnosti „křížových“ součinů:



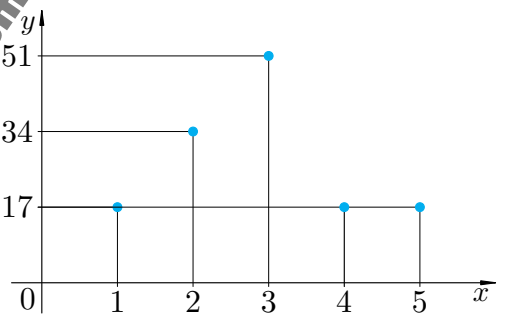
Například $\frac{15}{9} = \frac{10}{6}$, protože $15 \cdot 6 = 90 = 9 \cdot 10$.

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus http://prometheus-nakl.cz

1. Tomáš jednoho dne každou celou hodinu od osmi hodin ráno do šesti hodin večer měřil venkovní teplotu. Výsledky měření zaznamenal do tabulky. Sestrojte příslušný graf.

čas v hodinách	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
teplota ve °C	8	10	12	18	18	19	20	22	20	18	16

2. Závislost veličiny y na veličině x je dána grafem. Vyjádřete ji tabulkou.



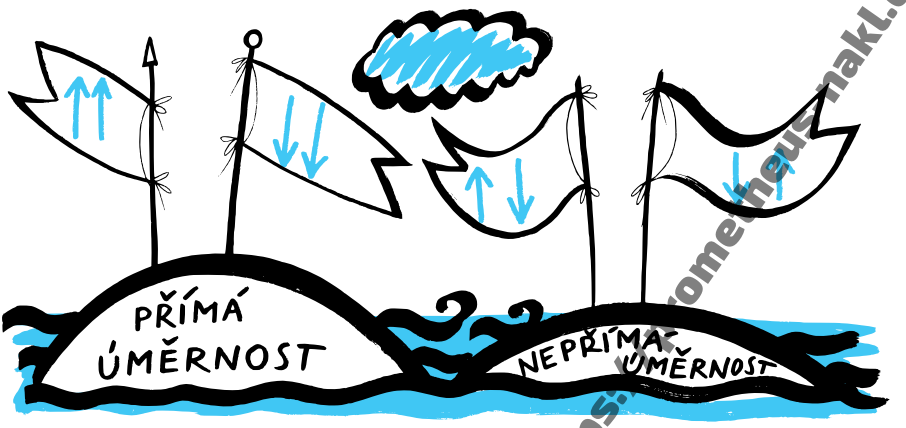
3. Hodnoty druhých odmocnin prvních deseti přirozených čísel zaokrouhlete na desetiny a zapište do tabulky podobné této:

x	1	2	...	10
$y \doteq \sqrt{x}$				

Pak tuto závislost znázorněte grafem o 10 bodech na milimetrovém papíru.

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Vysvětlili jsme, že úlohy o přímo úměrných nebo nepřímo úměrných veličinách můžeme řešit trojčlenkou. Směřování šipek si dobře zapamatujte podle obrázku:



Různé způsoby řešení úloh o úměrných veličinách si nyní prohlédněte na ukázkách ze sešitů Romany, Gábiny a Denisy.

Příklad 3. Automobil má spotřebu 7,2 l benzinu na 100 km. Kolik benzinu spotřebuje na trase dlouhé 350 km?

Romana

na 100 km ..... 7,2 l

na 1 km ..... 7,2 l : 100 = 0,072 l

na 350 km ..... 350 · 0,072 l = 25,2 l

Auto spotřebuje na 350 km 25,2 l benzinu.

Gábina

přímá úměrnost:

100 km ..... 7,2 l

350 km ..... x l

350 : 100 = x : 7,2

$\frac{3,5}{1} = \frac{x}{7,2}$ /. 7,2

3,5 · 7,2 = x

x = 25,2

Auto spotřebuje 25,2 l benzinu.

Denisa

7,2 l ..... na 100 km

x l ..... na 350 km

x : 7,2 = 350 : 100

x · 100 = 350 · 7,2

100x = 2520

x = 25,20

Na 350 km spotřebuje auto 25,2 l benzinu.

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Změnit kladné číslo v poměru $a : b$ znamená vynásobit toto číslo zlomkem $\frac{a}{b}$.

V případě $\frac{a}{b} > 1$ jde o *zvětšení*, v případě $\frac{a}{b} < 1$ o *zmenšení*.

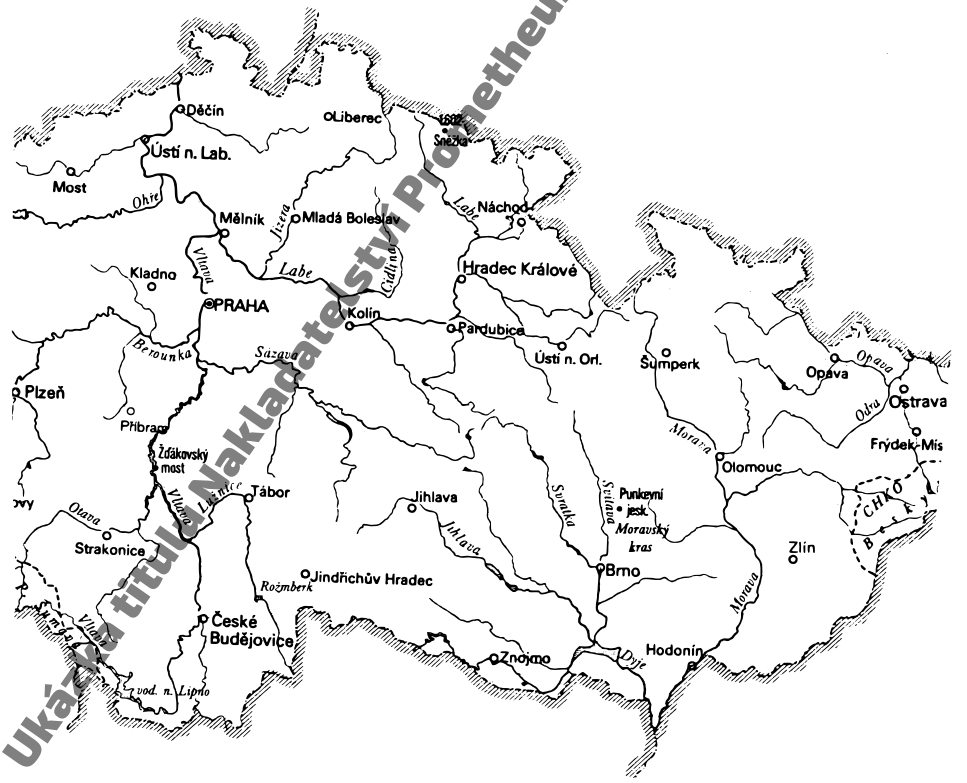
1. Číslo 360 změňte v poměru:

a) 1 : 5 b) 6 : 1 c) 7 : 4 d) 13 : 24

2. K přípravě 6 porcí přírodní hovězí šťavnaté pečeně je třeba 750 g očištěného zadního hovězího masa, 90 g sádla, 45 g cibule, 30 g másla, sůl a mletý pepř. Určete množství vážených surovin, které je třeba k přípravě 4 porcí této pečeně.

Co je *měřítko* mapy?

Prohlédněte si část mapy České republiky s měřítkem 1 : 3 000 000.



Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz