OBSAH

Na vysvětlenou ... 6
Úvod ... 8
1 Rovnice a jejich úpravy ... 10
Cvičení 1 ... 18
2 Rovnice s neznámou ve jmenovateli ... 20
Cvičení 2 ... 25
3 Kvadratické rovnice ... 26
Cvičení 3 ... 44
4 Slovní úlohy 1 ... 47
Cvičení 4 ... 57
5 Úlohy o společné práci ... 59
Cvičení 5 ... 64
6 Úlohy o směsích ... 66
Cvičení 6 ... 73
7 Rovnice s více neznámými ... 75
Cvičení 7 ... 98
8 Slovní úlohy 2 ... 101
Cvičení 8 ... 109
9 Úlohy z matematické olympiády ... 110
Cvičení 9 ... 114
10 Souhrnná cvičení ... 116
Výsledky průběžných úkolů ... 133
Výsledky cvičení ... 135
Výsledky souhrnných cvičení ... 139

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

ÚVOD

Matematická disciplína zvaná *algebra* se historicky utvářela jako nauka o řešení rovnic. S jejími základy jsme se seznámili už dříve: poznali jsme „jazyk“ mnohočlenů a jeho pravidla, která nám umožnila zapisovat a řešit jednoduché rovnice s jednou neznámou, pokud je bylo možné převést ekvivalentními úpravami na *lineární* rovnice. V této dovednosti se nyní nejprve zdokonalíme. Pak začneme řešit složitější rovnice, které znali a řešili již staří Babylóňané a které se dnes nazývají *kvadratické* rovnice s jednou neznámou.

Starořečtí učenci spojovali kvadratické rovnice s důležitými geometrickými úlohami. Jednu z nich, tzv. problém zlatého řezu, uvádí Eukleides (4. stol. př. Kr.) ve své knize *Základy* takto: „Rozdělit úsečku délky a tak, aby obdélník sestrojený z celé úsečky a z jedné z obou částí měl týž obsah jako čtverec sestrojený ze zbývající části úsečky.“ Označíme-li x stranu neznámého čtverce, pak citovaná úloha se vlastně ptá na řešení rovnice $a(a-x) = x^2$, která obsahuje „čtverec“ neboli „kvadrát“ x^2 neznámé x. Dodejme pro zajímavost, že uvedenou kvadratickou rovnici můžeme rovněž zapsat jako úměru $(a-x) : x = x : a$ a přečíst: „Jedna část úsečky se má ke druhé části stejně, jako se má druhá část k celé úsečce.“ Příčinou, proč se matematikové zabývali zlatým řezem, byl předpoklad, že úsečky dělené v tomto poměru jsou základem krásy v architektuře a ve výtvarném umění a že se zlatý řez vyskytuje v proporcích lidského těla, rostlin i v uspořádání vesmírných těles.

V tomto sešitě budeme také poprvé řešit rovnice, ve kterých vystupuje ne jedna, ale více neznámých. K určení jejich hodnot obvykle jedna taková rovnice nestačí, zpravidla je zapotřebí znát tolik „navzájem nezávislých“ rovnic, kolik je neznámých. I když se v našem textu omezíme pouze na soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými, metody řešení, které si osvojíme, lze uplatnit i při řešení soustav s velkým počtem rovnic a neznámých. Vysvětlíme v posledním odstavci, proč je řešení „rozsáhlých“ soustav rovnic v současné matematické praxi tak časté a významné.

Proměnné veličiny, které popisují průběh mnoha přírodních jevů nebo technických procesů, se řídí zákony, vyjádřenými tzv. diferenciálními rovnicemi. Takové rovnice nelze algebraicky (tj. pomocí aritmetických operací a konečného počtu známých a neznámých hodnot) vůbec zapsat a k vý-

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

počtu jejich řešení v naprosté většině případů neexistuje žádný vzorec. Přesto je možné vypočítat alespoň *přibližné* hodnoty těchto řešení, a to tak, že zkoumanou diferenciální rovnici zaměníme vhodnou soustavou algebraických rovnic. Přitom často platí, že takové „přiblížení“ má tím menší chybu, čím početnější soustavu rovnic k výpočtu zvolíme. Při praktických výpočtech jsme ovšem vždy omezeni tím, jak velké soustavy jsme schopni v „přijatelném“ čase vyřešit. Dnes už to samozřejmě nezávisí na počtářských schopnostech lidí, ale na operační rychlosti dostupné výpočetní techniky. (Zdůrazněme však, že jsou to lidé, kteří tvorbou programů počítačům celý postup výpočtů přesně předepisují.) Současné nejvýkonnější počítače umožňují v potřebném čase řešit například soustavy rovnic s desetitisíci neznámými, kterými se vyhodnocují aktuální údaje o průběhu kosmického letu, a podle jejich výsledků se rozhoduje o dalším řízení letu. Přemýšlíme-li proto někdy o vzniku a rozvoji kosmonautiky, nezapomeňme, že lety do vesmíru se staly skutečností díky dvěma vynálezům: raketovému motoru a počítači.

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

1 ROVNICE A JEJICH ÚPRAVY

Postupům řešení rovnic jsme věnovali podstatnou část sešitu *Rovnice a nerovnice*. Naučili jsme se nejprve řešit rovnice metodou ekvivalentních úprav a pak jsme ukázali, jak lze rovnice využít při řešení slovních úloh. Získané „teoretické“ poznatky o rovnicích si nyní stručně zopakujeme.

? Co již víme o *rovnicích*?

Zápisy

$$x - 17 = 7, \qquad 35 = 4x + 7, \qquad 3x + 5 = 2x - 7$$

jsou příklady **rovnic**. Na jedné nebo na obou stranách každé rovnice se objevuje *výraz s proměnnou*. Proměnná zastupuje neznámé číslo, které je třeba určit. Nazývá se **neznámá**; nejčastěji se označuje písmenem x. Užívají se však i jiná písmena.

Řešit rovnici znamená určit *všechna čísla*, která je možné dosadit za neznámou, aby se rovnice „přeměnila“ v platnou rovnost. Každé takové číslo nazýváme **kořenem** nebo **řešením** dané rovnice.

Slovo „řešení“ se u rovnic používá ve dvojím významu: jednak znamená *postup*, kterým určujeme neznámou, jednak se jím pojmenovává i „správná hodnota“ neznámé – *kořen*.

Připomeňme ještě, že levou stranu rovnice označujeme písmenem L, pravou stranu písmenem P.

? Jak postupujeme při řešení rovnic?

V sešitě *Rovnice a nerovnice* jsme podrobně vysvětlili metodu *ekvivalentních úprav*. Nyní ji stručně připomeneme.
Postup, kterým z jedné rovnice získáme jinou rovnici se stejnou množinou kořenů, se nazývá **ekvivalentní úprava** rovnice. Víme, že k takovým úpravám patří:

- výměna levé a pravé strany rovnice
- přičtení téhož čísla nebo mnohočlenu k oběma stranám rovnice
- odečtení téhož čísla nebo mnohočlenu od obou stran rovnice
- vynásobení obou stran rovnice týmž nenulovým číslem
- vydělení obou stran rovnice týmž nenulovým číslem

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Výraz $x+2$ nabývá hodnoty nula jedině pro $x=-2$. Tato hodnota x je však pro původní rovnici „zakázaná“, neboť výraz $\dfrac{x-1}{x+2}$ na její levé straně není pro $x=-2$ vůbec definován.

Budeme říkat, že rovnice

$$\frac{x-1}{x+2}+2=0$$

pro $x=-2$ *nemá smysl*. Pro všechna ostatní čísla x tato rovnice smysl má. Pro ně je vynásobení obou stran rovnice dvojčlenem $x+2$ ekvivalentní úpravou.

Dohodneme se, že při řešení rovnic s neznámou ve jmenovateli nejprve zjistíme, pro které hodnoty neznámé nemá rovnice smysl. Vyloučíme je tak, že stanovíme podmínky, za kterých jsou všechny výrazy v rovnici definovány. Obvykle je zapíšeme do závorek napravo od rovnice. Za těchto podmínek je pak odstraňování zlomků ekvivalentní úpravou.

Zápis celého řešení naší rovnice pak vypadá takto:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x+2}+2&=0 && (x\neq -2)\\
\frac{x-1}{x+2}+2&=0 && \mid\cdot(x+2)\\
x-1+2\cdot(x+2)&=0\\
x-1+2x+4&=0\\
3x&=-3\\
x&=-1
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$L=\frac{x-1}{x+2}+2=\frac{-1-1}{-1+2}+2=\frac{-2}{1}+2=0,\qquad P=0,\qquad L=P$$

Příklad 1. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+1}$$

Řešení. Zlomek na levé straně rovnice nemá smysl pro $x=1$, zlomek na pravé straně pro $x=-1$. Proto budeme hledat kořeny mezi těmi čísly x,

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

$*$**5.** Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{5}{1-x}$

b) $\dfrac{4}{3} + \dfrac{2x}{5x-4} = \dfrac{2x}{4-5x}$

c) $\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{5}{x-3} = \dfrac{3x-1}{x^2-9}$

d) $\dfrac{4x}{x^2-4} - \dfrac{1}{2-x} + \dfrac{3}{2+x} = 0$

e) $\dfrac{x-2}{x+2} - 1 = \dfrac{1-x}{x^2+4x+4}$

f) $\dfrac{2}{x-6} + \dfrac{1}{6-x} = \dfrac{6-x}{x^2-12x+36}$

$*$**6.** Zjistěte, zda rovnice

$$\frac{1}{2(2c-4)} - 4 = \frac{1}{4(c-2)} - \frac{c-2}{c^2-4}$$

s neznámou c má řešení.

3 KVADRATICKÉ ROVNICE

I když jsme již řešili rovnice, ve kterých se neznámá vyskytovala nejen v první, ale i ve druhé mocnině, v průběhu jejich řešení se členy s druhou mocninou neznámé „navzájem vyrušily“. Proto jsme po úpravách vždy dospěli k rovnici tvaru

$$ax = b$$

s neznámou x a konkrétními čísly a, b.

Nyní se naučíme řešit takové rovnice, ve kterých členy s druhou mocninou neznámé hrají „podstatnou roli“. Říkáme jim *kvadratické* rovnice. Takové rovnice se většinou nedají řešit metodou „členy s neznámou na jednu stranu rovnice, členy bez neznámé na stranu druhou“, se kterou jsme dosud při řešení rovnic vystačili.

? Co je kvadratická rovnice?

V rovnicích s neznámou x

$$x^2 = 2x, \qquad 4x^2 = 9, \qquad 2x^2 + 3x = 10$$

vystupují členy bez neznámé (tj. čísla 9 ve druhé a 10 ve třetí rovnici), členy s neznámou v první mocnině ($2x$ v první a $3x$ ve třetí rovnici) a členy

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

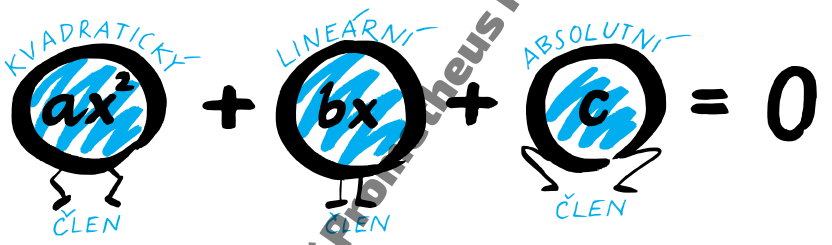
s neznámou ve druhé mocnině (x^2, $4x^2$ a $2x^2$). Jsou to příklady rovnic, které můžeme upravit na tvar

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde x je neznámá a a, b a c jsou čísla, kterým říkáme *koeficienty*.

Původní rovnice	Upravená rovnice	Koeficienty
$x^2 = 2x$	$x^2 - 2x = 0$	$a = 1,\ b = -2,\ c = 0$
$4x^2 = 9$	$4x^2 - 9 = 0$	$a = 4,\ b = 0,\ c = -9$
$2x^2 + 3x = 10$	$2x^2 + 3x - 10 = 0$	$a = 2,\ b = 3,\ c = -10$

Podle mocniny neznámé, kterou daný člen rovnice obsahuje, mluvíme o *absolutním* členu, *lineárním* členu a *kvadratickém* členu.



Je-li koeficient a kvadratického členu rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

roven nule ($a = 0$), můžeme člen ax^2 v rovnici „vynechat“. Tak dostaneme rovnici bez kvadratického členu

$$bx + c = 0,$$

kterou již umíme řešit. Proto se dále budeme zabývat pouze rovnicemi

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

ve kterých $a \neq 0$. Říkáme jim **kvadratické rovnice**. Patří k nim například rovnice

$$4x^2 + 7x - 12 = 0, \qquad 3x^2 - 15 = 0, \qquad x^2 + 3x = 0.$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

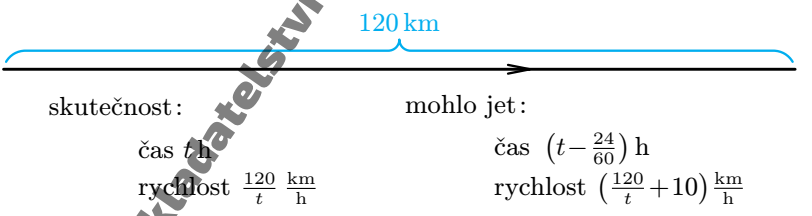
$$\begin{aligned}
\frac{3}{v} + \frac{13}{v+16} &= \frac{16}{2v} \qquad \Big| \cdot 2v \cdot (v+16) \\
6 \cdot (v+16) + 26v &= 16 \cdot (v+16) \\
6v + 96 + 26v &= 16v + 256 \\
16v &= 160 \\
v &= 10
\end{aligned}$$

Pavel jel první část trasy rychlostí $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a urazil ji za $\frac{3}{10}$ hod. Druhou část trasy jel rychlostí $26\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a trvalo mu to $\frac{13}{26}$ h, tedy $\frac{1}{2}$ h. Protože $\left(\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3+5}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ a $\frac{4}{5}\,\text{h} = 48\,\text{min}$, celá cesta mu trvala 48 minut. Kdyby jel celou trasu dlouhou 16 km rychlostí $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, trvala by mu cesta $\frac{16}{20}$ h, tj. $\frac{4}{5}$ h. Tak jsme zkontrolovali, že náš výsledek je správný.

Pavel ujel celou trasu za 48 minut.

Příklad 8. Auto ujelo vzdálenost 120 km. Kdyby zvýšilo svou průměrnou rychlost o $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, doba jeho cesty by byla o 24 minut kratší. Jak dlouho auto skutečně jelo?

Řešení. Za neznámou zvolíme číslo t, které vyjadřuje v hodinách čas, po který auto skutečně jelo. Jeho průměrná rychlost byla $\frac{120}{t}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kdyby jelo rychlostí o $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ větší, tj. $\left(\frac{120}{t} + 10\right)\frac{\text{km}}{\text{h}}$, trvala by mu cesta $\left(t - \frac{2}{5}\right)$ h, neboť $24\,\text{min} = \frac{2}{5}$ h. Tehdy by jeho rychlost byla $\frac{120}{t-\frac{2}{5}}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Proto platí:

$$\begin{aligned}
\frac{120}{t} + 10 &= \frac{120}{t - \frac{2}{5}} \qquad \Big| \cdot t \cdot \left(t - \tfrac{2}{5}\right) \\
120\left(t - \tfrac{2}{5}\right) + 10t \cdot \left(t - \tfrac{2}{5}\right) &= 120t \\
120t - 48 + 10t^2 - 4t &= 120t \\
10t^2 - 4t - 48 &= 0 \\
5t^2 - 2t - 24 &= 0
\end{aligned}$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

S odpovědí „Rybník se vyprázdnil za $\frac{80}{11}$ dne“ asi nejste spokojeni, i když je správná. „Názornější“ informaci dostaneme, vyjádříme-li výsledek $\frac{80}{11}$ smíšeným číslem $7\frac{3}{11}$. Z jeho zápisu vidíme, že vypouštění trvalo déle než 7 a méně než 8 celých dnů. U necelé části se asi spokojíme s odhadem $\frac{3}{11} \doteq \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Tak dospějeme k „praktičtější“ odpovědi:

Rybník se vypouštěl asi sedm a čtvrt dne.

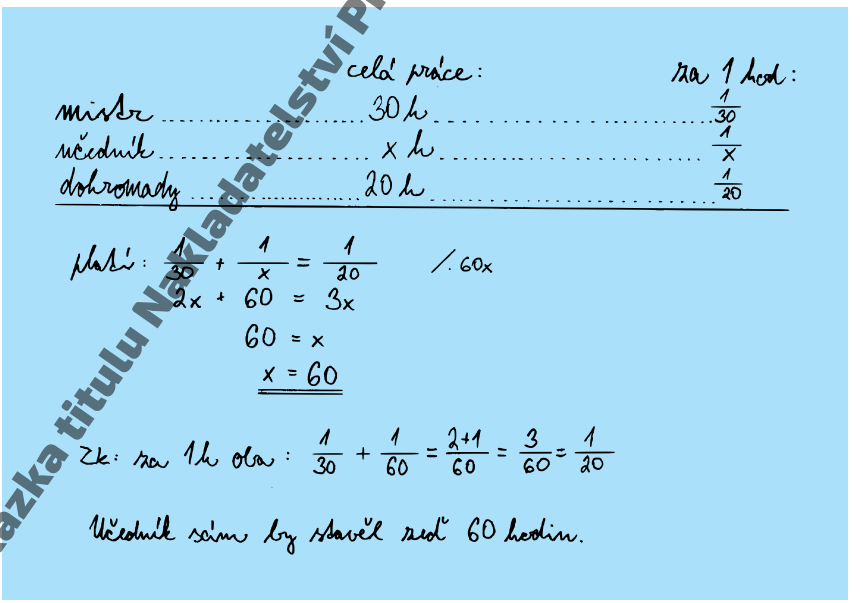
Příklad 3. Mistr společně s učedníkem postaví zeď za 20 hodin. Mistr sám by tuto práci vykonal za 30 hodin. Jak dlouho by zeď stavěl samotný učedník?

Řešení. Za neznámou x zvolíme počet hodin, které by k postavení zdi potřeboval učedník. Za 1 h učedník postaví $\frac{1}{x}$ celé zdi. Mistr za 1 h postaví $\frac{1}{30}$ zdi. Protože oba společně za 1 h postaví $\frac{1}{20}$ zdi, platí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{30} &= \frac{1}{20} \qquad \Big| \cdot 60x \\ 60 + 2x &= 3x \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Učedník by sám stavěl zeď 60 hodin.

Připojíme ještě Ondrovo řešení této úlohy:



Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Obě rovnice

$$3x + 2y = 46,$$
$$2x + 3y = 49$$

vystihují jednu situaci (nákupy ve stejném obchodě), proto k sobě „patří“. Říkáme, že tvoří **soustavu** dvou rovnic se dvěma neznámými.

Možná uhodnete, že oběma rovnicím naší soustavy vyhovují čísla $x = 8$ a $y = 11$. Skutečně:

$$3 \cdot 8 + 2 \cdot 11 = 46$$
$$2 \cdot 8 + 3 \cdot 11 = 49$$

Takovou *dvojici čísel* nazveme **řešením** dané soustavy. Hodnoty $x = 8$ a $y = 11$ proto nejsou dvě řešení naší soustavy, ale „spolu nerozlučně“ tvoří *jedno* řešení.

Řešením soustavy rovnic se dvěma neznámými je tedy *dvojice čísel*.

Víte již, že u rovnic s jednou neznámou má slovo *řešení* dva významy. Označujeme jím jednak postup, který vede k výsledku, jednak výsledek samotný. Tento výsledek (číslo) se také nazývá *kořen* rovnice.

Také u soustav rovnic budeme slovem *řešení* označovat jak postup, tak výsledek. Pro dvojici čísel, která je řešením dané soustavy, se slovo *kořen* nepoužívá.

V této kapitole se naučíme základům toho, jak řešení soustav rovnic počítat, a ne pouze „hádat“. Při těchto výpočtech se zároveň vždy ujistíme, zda je vypočtené řešení *jediné*. Tak například vysvětlíme, proč soustava

$$3x + 2y = 46,$$
$$2x + 3y = 49$$

nemá jiné řešení než $x = 8$ a $y = 11$.

1. Rozhodněte, zda dvojice čísel $x = 1$ a $y = 2$ je řešením soustavy:

a) $7x + 2y = 11$, $7x - 6y = -5$

b) $2x - 7y = -12$, $3x + 9y = 13$

c) $4x - 5y = 6$, $5x - 4y = -1$

? Jak z rovnice vyjádříme jednu neznámou pomocí druhé neznámé?

Vraťme se k nákupům oříšků a čokolád z úvodu kapitoly. Zdůrazněme, že k určení neznámých cen 1 čokolády a 1 balíčku oříšků by nám jedna rovnice, například

$$3x + 2y = 46,$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz