Obsah

Úvod 5

Seznam použitých symbolů a značek 6

1 ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V ROVINĚ 7

1.1 Soustava souřadnic 7
1.2 Vzdálenost dvou bodů 11
1.3 Souřadnice středu úsečky 14
1.4 Orientované úsečky a vektory 17
1.5 Souřadnice vektoru a jeho velikost 24
1.6 Sčítání vektorů a násobení vektoru číslem 30
1.7 Úhel dvou vektorů a skalární součin vektorů 37
1.8 Parametrické rovnice přímky 43
1.9 Obecná rovnice přímky 48
1.10 Vzájemná poloha dvou přímek 53
1.11 Směrnicový tvar rovnice přímky 62
1.12 Vzdálenost bodu od přímky 70
1.13 Rovnice kružnice 76
Přehled analytické geometrie 82

2 ZÁKLADY LINEÁRNÍ ALGEBRY 85

2.1 n-členné vektory, jejich sčítání a násobení číslem 85
2.2 Lineární kombinace vektorů 88
2.3 Lineární závislost a nezávislost vektorů 91
2.4 Matice, jejich sčítání a násobení číslem 97
2.5 Násobení matic 103
2.6 Hodnost matice 106
2.7 Soustavy lineárních rovnic a jejich řešitelnost 113
2.8 Řešení soustav lineárních rovnic 120
2.9 Řešení soustav lineárních nerovnic 127
2.10 Krátce o lineárním programování 134

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

3 KOMPLEXNÍ ČÍSLA 140
3.1 Zavedení komplexních čísel a jejich znázornění v rovině . 140
3.2 Základní početní operace s komplexními čísly 145
3.3 Absolutní hodnota komplexního čísla 152
3.4 Goniometrický tvar komplexního čísla 157
3.5 Řešení kvadratických rovnic v komplexním oboru . . . 163

4 ÚVOD DO TEORIE GRAFŮ 169
4.1 Základní pojmy 169
4.2 Další vlastnosti neorientovaných grafů 174
4.3 Ohodnocené grafy 179
4.4 Orientované grafy 184
4.5 Řízení projektů a metoda kritické cesty 189
Závěrečná poznámka o teorii grafů 195

Výsledky úloh 196

Rejstřík 206

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Úvod

Připomeňme si na začátku závěrečného, čtvrtého dílu této učebnice, co všechno jsme probírali v dílech předcházejících. V prvním dílu — po zopakování učiva ze základní školy — jsme pracovali s mnohočleny a lomenými výrazy, seznámili jsme se s lineární a kvadratickou funkcí a naučili jsme se řešit lineární a kvadratické rovnice, nerovnice a jejich soustavy. Ve druhém dílu jsme prohloubili své poznatky o funkcích o pojem funkce rostoucí, klesající, prosté a inverzní, rozšířili jsme pojem mocnina na mocniny s racionálním exponentem, seznámili jsme se s funkcí lineární lomenou, exponenciální, logaritmickou a s posloupnostmi, zejména s posloupností aritmetickou a geometrickou; dále jsme se zabývali shodnými zobrazeními v rovině a stejnolehlostí. Ve třetím dílu jsme podrobně probrali goniometrii a trigonometrii, ve stereometrii jsme studovali vzájemné polohy přímek a rovin v prostoru a určili jsme objemy a povrchy hranolu, jehlanu, válce, kužele a koule; seznámili jsme se také se základy kombinatoriky, počtu pravděpodobnosti a statistiky.

Matematické učivo, které se ve škole probírá, převážná většina z vás zapomene, zejména nebude-li je ve své práci potřebovat. Přesto však není zbytečné, že se ve škole matematiku učíte. Dozvídáte se totiž nejen určité poznatky, ale vyučování matematice — aniž si to uvědomujete — formuje váš přístup k řešení problémů a situací, které s matematikou ani nemusejí souviset. Chcete-li ve své budoucí práci porozumět úkolům, které vás čekají, a chcete-li k nim přistupovat aktivně a tvůrčím způsobem, musíte se tomu učit už ve škole; školská matematika vám k tomu poskytuje bohaté možnosti. Ano, většinu matematických poznatků získaných ve škole nejspíše zapomenete — ale tím, že se je budete učit, že se je budete snažit pochopit a přijít na kloub tomu, proč je to zrovna tak, jak to je, získáte něco, co se zapomenout nedá.

A ještě poznámka na závěr. Stejně jako v předcházejících dílech i v tomto dílu obrázek sovy znamená, že následující část textu je poněkud obtížnější.

Autor

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

1.4 Ve zvolené souřadnicové soustavě zobrazte útvar vyjádřený
a) nerovnicemi $-1 \leqq x \leqq 2$; b) nerovnicemi $|x| \leqq 2$ a $y \leqq 1$;
c) nerovnicemi $x \geqq 1$ a $|y| \leqq 2$.

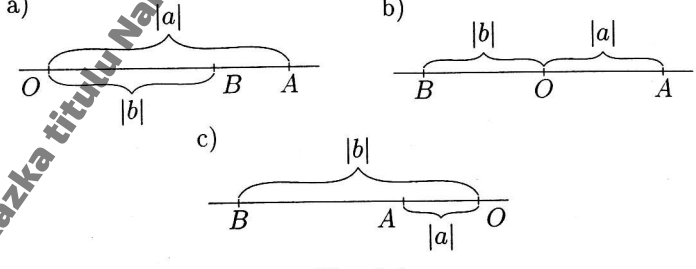
1.5 Ve zvolené souřadnicové soustavě zobrazte útvar určený podmínkami:
a) $xy > 0$ b) $(x-1)y \leqq 0$
c) $(x-2)(y+1) \leqq 0$ d) $y(1-|x|) \geqq 0$

1.2 Vzdálenost dvou bodů

O vzorci pro vzdálenost dvou bodů jsme se zmínili už dříve. Ve 3. dílu této učebnice jsme ho použili k odvození vzorců pro $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos(\alpha+\beta)$. Nebude však na škodu, když si způsob, kterým jsme k němu dospěli, připomeneme. Budeme k tomu potřebovat následující známý fakt:

Jsou-li body A, B na číselné ose obrazy čísel a, b, pak pro vzdálenost těchto bodů platí: $|AB| = |a-b|$.

Toto tvrzení dokážeme jen pro čísla a, b různá od nuly, $a > b$; u zbývajících možností se postupuje podobně. V uvažovaném případě mohou pro čísla a, b nastat pouze možnosti znázorněné na obr. 1.5a, b, c:
a) pro $a > b > 0$ platí: $|AB| = |OA| - |OB| = |a| - |b| = a - b = |a-b|$,
b) pro $a > 0 > b$ platí: $|AB| = |OA| + |OB| = |a| + |b| = a - b = |a-b|$,
c) pro $0 > a > b$ platí: $|AB| = |OB| - |OA| = |b| - |a| = -b + a = |a-b|$.



Obr. 1.5

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

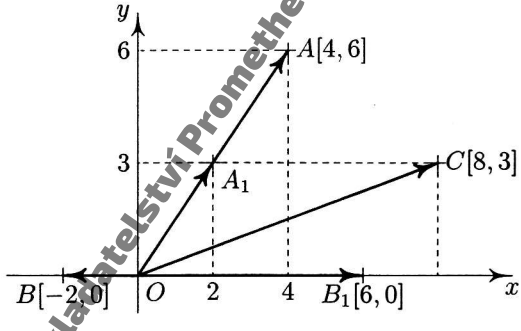
vektoru $2\boldsymbol{u}$ je dvojnásobkem příslušné souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$, tj. $v_1 = 2u_1$, $v_2 = 2u_2$. Zobecněním tohoto výsledku se dá ukázat, že platí obecně:

> Součin reálného čísla k a vektoru $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ je vektor $k\boldsymbol{u} = (ku_1, ku_2)$.

Příklad 13

Ve zvolené souřadnicové soustavě zobrazte vektory $\boldsymbol{u} = (4, 6)$ a $\boldsymbol{v} = (-2, 0)$ a sestrojte vektor $\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$. O správnosti se přesvědčte tak, že souřadnice vektoru $\boldsymbol{w}$ vypočtete.

Řešení. Za umístění vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ zvolíme na obr. 1.23 orientované úsečky $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, kde $O[0,0]$, $A[4,6]$, $B[-2,0]$; umístěním vektorů $\frac{1}{2}\boldsymbol{u}$, $-3\boldsymbol{v}$ jsou orientované úsečky $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, kde $A_1[2,3]$, $B_1[6,0]$. Vektor $\boldsymbol{w}$ sestrojíme jako úhlopříčku OC rovnoběžníku OB_1CA_1: $\boldsymbol{w} = C - O$.



Obr. 1.23

Určíme-li souřadnice vektoru $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$ výpočtem, dostaneme

$$w_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 - 3(-2) = 8, \qquad w_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 - 3 \cdot 0 = 3.$$

Zjistili jsme tak, že $\boldsymbol{w} = (8, 3)$; při správném grafickém sestrojení tohoto vektoru má bod C na obr. 1.23 tytéž souřadnice: $C[8, 3]$.

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

1.11 Směrnicový tvar rovnice přímky

Jak víme, je možné každou přímku vyjádřit obecnou rovnicí $ax + by + c = 0$; v této rovnici je aspoň jedno z čísel a, b různé od nuly. Pro $a = 0$, $b \neq 0$ vyjadřuje tato rovnice přímku $by + c = 0$, tj. rovnoběžku $y = -\frac{c}{b}$ s osou x; pro $a \neq 0$, $b = 0$ tato rovnice představuje přímku $ax + c = 0$, tj. rovnoběžku $x = -\frac{c}{a}$ s osou y; pro $a \neq 0$, $b \neq 0$ jde o přímku, která je různoběžná s každou souřadnicovou osou.

Předpokládejme, že v obecné rovnici přímky $ax + by + c = 0$ je $b \neq 0$, takže přímka, která je touto rovnicí určena, není rovnoběžná s osou y. V tomto případě můžeme z dané rovnice vyjádřit proměnnou y:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Označíme-li

$$-\frac{a}{b} = k, \qquad -\frac{c}{b} = q,$$

dostaneme rovnici

$$y = kx + q,$$

která se nazývá **rovnice přímky ve směrnicovém tvaru**.

> Směrnicový tvar rovnice přímky je rovnice $y = kx + q$, kde k, q jsou libovolná čísla. Číslo k se nazývá směrnice přímky.

Z toho, co bylo řečeno, je jasné, že ve směrnicovém tvaru se dají vyjádřit pouze přímky, které nejsou rovnoběžné s osou y; pouze tyto přímky mají směrnici.

Pokud vám rovnice $y = kx + q$ něco připomíná, není to náhoda; v 1. dílu této učebnice jsme se zabývali **lineární funkcí** a definovali jsme ji takto: Lineární funkce je každá funkce, kterou lze vyjádřit ve tvaru $y = ax + b$, kde a, b jsou libovolná čísla. Z toho, co už víme o směrnicovém tvaru rovnice přímky, ve spojitosti s lineární funkcí vyplývá: Každá přímka, kterou lze vyjádřit ve směrnicovém tvaru, je grafem lineární funkce. Graf každé lineární funkce je přímka, kterou lze vyjádřit ve směrnicovém tvaru.

Ukázka titulu lekcí dle SVP Prometheus https://prometheusnaklad.cz

1.56 Určete vzdálenost bodu M od přímky p, jestliže platí:
a) $M[-2,1]$, p: $5x-4y+3=0$
b) $M[0,0]$, p: $y=2x-3$
c) $M[2,-1]$, p: $x=3+t$, $y=1-t$, $t\in\mathsf{R}$
d) $M[1,11]$, p: $6x-y+5=0$

1.57 V trojúhelníku ABC, kde $A[0,0]$, $B[3,4]$, $C[-2,2]$, určete velikost výšky na stranu AB a s její pomocí vypočtěte obsah trojúhelníku ABC.

1.58 Určete číslo c tak, aby bod M měl od přímky p: $x+y+c=0$ vzdálenost d, jestliže
a) $M[0,0]$, $d=5$; b) $M[2,-1]$, $d=1$.

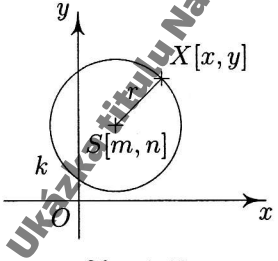
1.59 Na přímce p: $x+y-1=0$ určete bod, který má od přímky q vzdálenost $d=2$, jestliže
a) q: $y+1=0$; b) q: $x-2=0$;
c) q: $y=x$; d) q: $x=1+t$, $y=-3t$, $t\in\mathsf{R}$.

1.60 Napište rovnici přímky, která prochází bodem $P[3,0]$ a má od počátku vzdálenost a) $d=3$; b) $d=1$; c) $d=0$.

1.13 Rovnice kružnice

V závěrečném článku z učiva analytické geometrie se budeme krátce zabývat kružnicí.

K odvození její rovnice vyjdeme ze známé definice: **Kružnice se středem S a s poloměrem r je množina všech bodů roviny, které od bodu S mají vzdálenost r.**



Obr. 1.43

Předpokládejme, že v souřadnicové soustavě Oxy je podle obr. 1.43 dána kružnice k se středem v bodě $S[m,n]$ a s poloměrem r. Je-li $X[x,y]$ libovolný bod kružnice k, je jeho vzdálenost r od středu S této kružnice rovna $\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}$. Platí tedy

$$\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}=r,$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

jsou regulární a které singulární:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3, & 5 \\ 1, & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4, & 3, & 2 \\ 1, & -1, & -2 \\ 3, & 4, & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2, & 3, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 3, & 2 \\ 0, & 3, & 1, & 2 \\ 3, & 2, & 1, & 0 \end{pmatrix}$$

2.7 Soustavy lineárních rovnic a jejich řešitelnost

Se soustavami rovnic o dvou nebo o třech neznámých, které jsme dosud řešili, se v různých úlohách nevystačí; často je zapotřebí řešit soustavy mnoha rovnic o velkém počtu neznámých. Těmito soustavami se nyní budeme zabývat a využijeme k tomu svých znalostí o maticích.

Soustava rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

kde a_{ik}, b_i jsou reálná čísla a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ neznámé, se nazývá **soustava m lineárních rovnic o n neznámých**; čísla a_{ik} jsou koeficienty této soustavy. Jestliže jsou všechna čísla $b_1, b_2, \ldots, b_m$ rovna nule, nazývá se tato **soustava homogenní**, je-li aspoň jedno od nuly různé, je to **soustava nehomogenní**.

U každé soustavy lineárních rovnic rozlišujeme dvě matice. V případě soustavy uvedené výše to je matice

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

2.35 Určete, pro které hodnoty parametru p je řešitelná soustava:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= p \end{aligned}$$

2.8 Řešení soustav lineárních rovnic

Ukážeme si hned na úvod, jakým způsobem se od řešení soustav lineárních rovnic, který jsme používali dosud, přejde k řešení těchto soustav pomocí matic. Budeme řešit jednoduchou soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých a porovnávat postup řešení s maticemi, jejichž pomocí jsme zjišťovali, zda soustava má, či nemá řešení:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ x + y - z &= 0 \\ -x + y + z &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -1, & 1 & 4 \\ 1, & 1, & -1 & 0 \\ -1, & 1, & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tuto soustavu upravíme tak, že ke druhé rovnici přičteme první vynásobenou číslem -1 a ke třetí rovnici přičteme první; odpovídající matici vpravo upravíme podobně: k druhému řádku přičteme první vynásobený číslem -1 a ke třetímu řádku přičteme první. Dostaneme tak soustavu a matici:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ 2y - 2z &= -4 \\ 2z &= 6 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -1, & 1 & 4 \\ 0, & 2, & -2 & -4 \\ 0, & 0, & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Soustava, kterou jsme takto získali, má jediné řešení: $z = 3$, $y = 1$, $x = 2$; vzhledem k tomu, že šlo o úpravy ekvivalentní, je to i řešení soustavy původní. K tomuto výsledku však dospějeme i od poslední matice; dostali jsme ji z původní matice úpravami neměnícími hodnost matice. Tyto úpravy byly prováděny jen s řádky matice. To však znamená, že čísla v prvním sloupci jsou koeficienty u neznámé x a čísla ve druhém a třetím sloupci jsou koeficienty u neznámých y a z v soustavě rovnic, která je s původní soustavou ekvivalentní. Je to soustava:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + (-1) \cdot y + 1 \cdot z &= 4 \\ 0 \cdot x + 2 \cdot y + (-2) \cdot z &= -4 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 2 \cdot z &= 6 \end{aligned} \qquad \text{neboli} \qquad \begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ 2y - 2z &= -4 \\ 2z &= 6 \end{aligned}$$

Z této jednodušší soustavy získané z poslední matice určíme neznámé x, y, z snadno.

ukázka titulu Lékařského sdružení Prometheus https://prometheus-nakl.cz

3.4 V Gaussově rovině je dána úsečka AB, kde A je obrazem čísla 1 a B je obrazem čísla 5. Určete komplexní číslo, jehož obrazem je takový bod C, že trojúhelník ABC je rovnostranný. (Návod: Uvědomte si souvislost výšky v_c a imaginární části komplexního čísla, jehož obrazem je bod C.)

3.5 Označme I množinu všech čísel imaginárních a I_R množinu všech čísel ryze imaginárních. Zjistěte, zda platí:
$\mathsf{I}_\mathsf{R} \cap \mathsf{R} = \emptyset$, $\mathsf{I} \cap \mathsf{R} = \emptyset$, $\mathsf{I}_\mathsf{R} \cap \mathsf{I} = \mathsf{I}$, $\mathsf{I}_\mathsf{R} \cup \mathsf{I} = \mathsf{C}$, $\mathsf{I}_\mathsf{R} \cup \mathsf{R} = \mathsf{C}$, $\mathsf{I} \cup \mathsf{R} = \mathsf{C}$

3.2 Základní početní operace s komplexními čísly

V tomto článku se naučíme komplexní čísla sčítat, odčítat, násobit a dělit. Nejdříve si však ujasníme, kdy se dvě komplexní čísla rovnají.

> Komplexní čísla $a + b\mathrm{i}$, $c + d\mathrm{i}$ se rovnají, jestliže se rovnají jejich části reálné i jejich části imaginární, neboli když platí $a = c$ a zároveň $b = d$.

Všimněte si, že takto definovaná rovnost je v souladu s představou komplexních čísel jako uspořádaných dvojic reálných čísel; víme totiž, že uspořádané dvojice (a, b), (c, d) se rovnají, jestliže $a = c$ a zároveň $b = d$.

Komplexní čísla sčítáme a násobíme po formální stránce stejným způsobem, jako by šlo o dvojčleny; při násobení navíc využíváme toho, že $\mathrm{i}^2 = -1$:

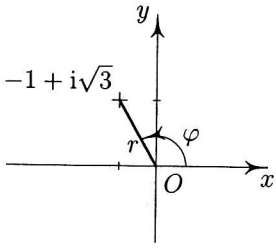
$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$$

$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = ac + ad\mathrm{i} + bc\mathrm{i} + b\mathrm{i} \cdot d\mathrm{i} = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$$

Z tohoto důvodu si tyto výsledky (zejména vzorec pro násobení) nemusíte pamatovat — součet, resp. součin dvou daných komplexních čísel neurčujeme tak, že bychom do těchto vzorců dosazovali příslušné hodnoty a, b, c, d. Pro úplnost a také kvůli přesnosti však definice těchto operací uvedeme:

> Součet libovolných komplexních čísel $a + b\mathrm{i}$, $c + d\mathrm{i}$ je komplexní číslo $(a + c) + (b + d)\mathrm{i}$.
>
> Součin libovolných komplexních čísel $a + b\mathrm{i}$, $c + d\mathrm{i}$ je komplexní číslo $(ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$.

Ukázka studijního textu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz



Obr. 3.9

Argument φ určíme z obr. 3.9, kde je dané číslo z znázorněno v Gaussově rovině. Vidíme, že argument φ leží v intervalu $\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$ a že pro něj platí

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\varphi = \frac{-1}{r} = -\frac{1}{2}.$$

Těmto třem podmínkám vyhovuje jediné číslo φ; pokud na ně nepřijdete sami, přesvědčte se aspoň, že to je číslo $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Pro dané číslo z tak platí:

$$z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

Z goniometrického tvaru komplexního čísla snadno poznáme, zda toto číslo je či není komplexní jednotkou. Je-li totiž číslo $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ komplexní jednotka, je jeho absolutní hodnota rovna jedné, takže platí $|z| = r = 1$. To však znamená, že každou komplexní jednotku lze vyjádřit ve tvaru $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$. Platí však i obráceně: Každé komplexní číslo tvaru $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ je komplexní jednotka, neboť

$$|\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1.$$

Zabývejme se krátce součinem dvou komplexních čísel vyjádřených v goniometrickém tvaru. Zvolme čísla

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$$

a vypočtěme jejich součin $z_1 z_2$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ &\quad + \mathrm{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)]. \end{aligned}$$

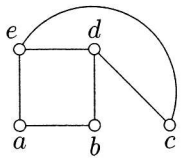
Připomeneme-li si součtové vzorce pro sinus a kosinus

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta,$$

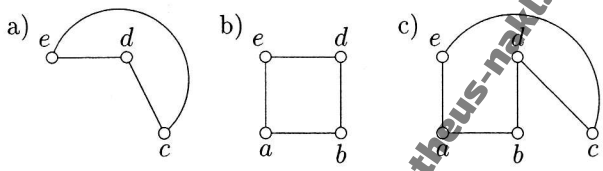
Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Příklad 4

Nakreslete všechny podgrafy grafu G na obr. 4.10, které jsou kružnicemi.



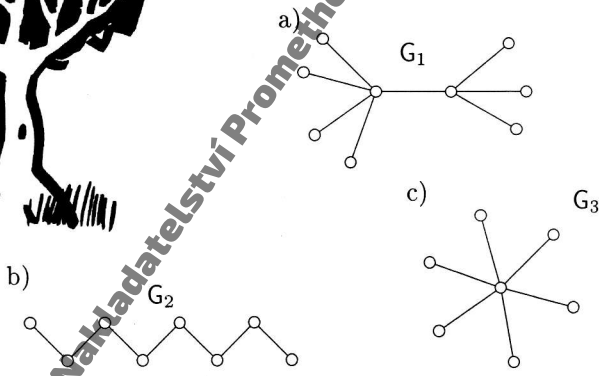
Obr. 4.10



Obr. 4.11

Řešení. Všechny podgrafy grafu G, které jsou kružnicemi, jsou znázorněny na obr. 4.11a, b, c. Tyto kružnice mají délky 3, 4 a 5.

Dalším typem souvislých grafů jsou grafy, které žádnou kružnici neobsahují; některé takové grafy jsou znázorněny na obr. 4.12a, b, c. Tyto grafy se nazývají stromy.



Obr. 4.12

Strom je souvislý graf, jeho žádný podgraf není kružnice.

Poznamenejme, že této definici vyhovují i grafy skládající se z jediného uzlu; i takovéto grafy tedy považujeme za stromy.

Všimněme si stromů znázorněných na obr. 4.12a, b, c. Graf G_1 se skládá z devíti uzlů a osmi hran, graf G_2 má osm uzlů a sedm hran,

Upáka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz